Übungsstunde 9:

Notizen neu auch auf der Webseite: n.ethz.ch/~michbaum

Themen:

- QR-Zerlegung mit Gram-Schmidt
- Modifizierter Gram-Schmidt
- Matrixnorm
- Ausgleichsrechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate
  - ↳ Normalengleichung
  - ↳ QR-Zerlegung
- Determinante

QR-Zerlegung mit Gram-Schmidt:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}, \quad \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{I}}$$

$$n\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \underline{v}_1, & \underline{v}_2, & \dots, & \underline{v}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{k}\right. = n\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} | & & & | \\ \underline{q}_1, & \underline{q}_2, & \dots, & \underline{q}_k \\ | & & & | \end{bmatrix}}^{k}\right. \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{q}_1^T\underline{v}_1 & \underline{q}_1^T\underline{v}_2 & \cdots & \underline{q}_1^T\underline{v}_k \\ 0 & \underline{q}_2^T\underline{v}_2 & & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \underline{q}_k^T\underline{v}_k \end{bmatrix}}^{k}\Bigg\}k$$

$$\underline{q}_1\,\underline{q}_1^T = \underline{\underline{I}}$$

Modifizierter Gram-Schmidt Algo:

Pseudocode:

```
Für j = 1, 2, ... n
    v = v_j                  ←
    Für i = 1, 2, ..., j-1   ←
        r_ij := <q_i, v>     ←
        v = v - r_ij q_i
    r_jj = ||v||
    q_j = v / r_jj
```

↑ Es wird sofort subtrahiert

Normalerweise:

(i) $e^{(1)} = \frac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$

(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)}\rangle \cdot e^{(1)} \Rightarrow e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)}\rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)}\rangle e^{(2)} \Rightarrow e^{(3)} = \frac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$

⋮

↑ ↑ Es wird am Ende subtrahiert

L^2-Skalarpr.:

$$\langle f(x), g(x)\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx \qquad \{V, L^2\}$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} f(x)\,f(x)\,dx}$$

Matrixnorm:

$$\|\underline{\underline{A}}\| = \max_{\|\underline{x}\|=1} \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\|$$

Ausgleichsrechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & \\ & \\ & \end{bmatrix}}_{n} \Big\} m$$

$\Big\}$ $m-n$ Verträglichkeitsbed.

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

$$\|\underline{r}\|_2 = \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c}\|_2$$

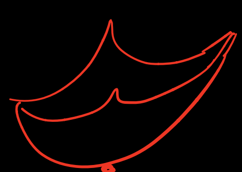
$\rightsquigarrow$ $\sqrt[2]{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2}$ minimieren!

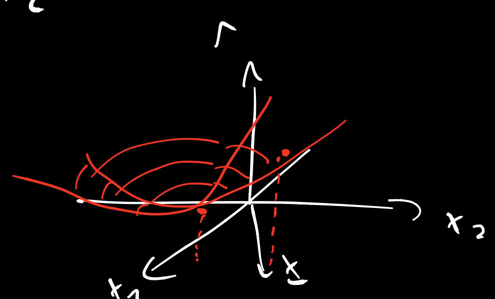
$\rightsquigarrow$ **Normalengleichungen:**

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}$$

Beweisidee:

$$\Phi(x) := \|\underline{c} - \underline{\underline{A}}\,\underline{x}\|_2^2 = \langle \underline{c} - \underline{\underline{A}}\,x, \underline{c} - \underline{\underline{A}}\,x\rangle \le \|\underline{c} - \underline{\underline{A}}\,\underline{y}\| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$





$$\Phi_z : t \mapsto \Phi_z(t) := \| \underline{c} - \underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z}) \|_2^2 \qquad \underline{z} \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Phi_z(t) = \langle \underline{c} - \underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z}), \underline{c} - \underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z}) \rangle$$

$$= [\underline{c} - \underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z})]^T [\underline{c} - \underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z})]$$

$$= t^2(\underline{z}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{z}) + 2t(\underline{z}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} - \underline{z}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{c}) + (\underline{x}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\, x + c^T c - 2\underline{x}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{c})$$

Φ_z minimum bei $t = 0 \iff \Phi_z'(t=0) \stackrel{!}{=} 0$

$$0 = \Phi_z'(0) = 2(\underline{z}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} - \underline{z}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{c})$$

$$= 2\underline{z}^T (\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} - \underline{\underline{A}}^T \underline{c}) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \underline{z} \neq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} - \underline{\underline{A}}^T c = 0$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}$$

Bsp: 101

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	1	3	4

$$y = f(x) = a x^2 + b x + c \cdot 1$$

$$\alpha(x) = x^2 \quad , \quad \beta(x) = x \quad , \quad \gamma(x) = 1 = x^0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \alpha(-1) & \beta(-1) & \gamma(-1) \\ \alpha(0) & \beta(0) & \gamma(0) \\ \alpha(1) & \beta(1) & \gamma(1) \\ \alpha(2) & \beta(2) & \gamma(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} , \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} \, \underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Ausgleichsrech. mit QR:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}} \qquad \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \diagdown \\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{c} = \underline{d}$$

Q quadratisch

Lzevtl. erweitern mit

Gram-Schmidt

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} * \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{d_0} \\ \underline{d_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{d_0} \\ \underline{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{d_0} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{r} \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ Fehler

Beispiel 103:

$$x_1 + x_2 - 1 = r_1$$
$$x_2 - 3 = r_2$$
$$x_2 - 4 = r_3$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & \sin \\ 0 & -\sin & \cos \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = G^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G \cdot A = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c+s \\ 0 & \boxed{c-s} \end{bmatrix}$$

$\boxed{c-s} \Rightarrow 0$ $\qquad \phi = 45°$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Big\} R_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{c} = \underline{\underline{G}}\,\underline{c} = \underline{d}$$

$$\underline{d} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, d_0 \\ \\ d_1 \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ \sqrt{2}\, x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ \sqrt{2}\, x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ \sqrt{2}\, x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_2 = \frac{7}{2}}}, \quad \underline{\underline{x_1 = -\frac{5}{2}}}$$

QR mit Gram Schmidt:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i) $q^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ii) $$q^{(2)'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow q^{(2)} = \frac{q^{(2)'}}{\|q^{(2)'}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ? \\ 0 & 1/\sqrt{2} & ? \\ 0 & 1/\sqrt{2} & ? \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} q^{(1)T} v_1 & q^{(1)T} v_2 \\ 0 & q^{(2)T} v_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{d} = \underline{Q}^T \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \underline{c}$$

Determinanten:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Laplac'scher Entwicklungssatz:

$$\det \begin{bmatrix} {}^{+}a & {}^{-}b & {}^{+}c \\ {}^{-}d & {}^{+}e & {}^{-}f \\ {}^{+}g & {}^{-}h & {}^{+}i \end{bmatrix} = +a \cdot \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - d \cdot \det \begin{bmatrix} b & c \\ h & i \end{bmatrix} + g \cdot \det \begin{bmatrix} b & c \\ e & f \end{bmatrix}$$

$$f_1 \perp g_1$$

Übungsstunde 9:

Notizen neu auch auf der Webseite: n.ethz.ch/~michbaum

Themen:

- QR-Zerlegung mit Gram-Schmidt
- Modifizierter Gram-Schmidt
- Matrixnorm
- Ausgleichsrechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate
  - ↳ Normalengleichung
  - ↳ QR-Zerlegung
- Determinante

QR-Zerlegung mit Gram-Schmidt:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}} \quad , \quad \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{I}}$$

$$n\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \underline{v}_1, & \underline{v}_2, & \dots, & \underline{v}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{k}\right. = n\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \underline{q}_1, & \underline{q}_2, & \dots, & \underline{q}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}}^{k}\right. \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{q}_1^T\underline{v}_1 & \underline{q}_1^T\underline{v}_2 & \cdots & \underline{q}_1^T\underline{v}_k \\ 0 & \underline{q}_2^T\underline{v}_2 & & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \underline{q}_k^T\underline{v}_k \end{bmatrix}}^{k}\Bigg\}k$$

Modifizierter Gram-Schmidt Algo:

$$\underline{q}_1\,\underline{q}_1^T = \underline{\underline{I}}$$

Pseudocode:

Für $j = 1, 2, 3, \dots, n$

- $v = v_j$ ←
- Für $i = 1, 2, \dots, j-1$ ←
  - $r_{ij} := \langle q_i, v \rangle$ ←
  - $v = v - r_{ij} q_i$
- $r_{jj} = \|v\|$
- $q_j = \frac{v}{r_{jj}}$

↑ Es wird sofort subtrahiert

Normalerweise:

(i) $e^{(1)} = \frac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$

(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle \cdot e^{(1)} \Rightarrow e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle e^{(2)} \Rightarrow e^{(3)} = \frac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$

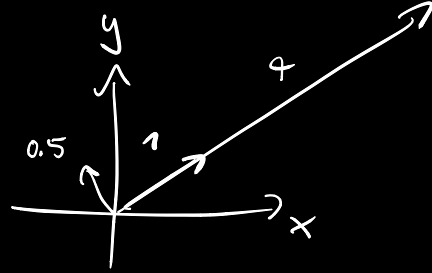
⋮

↑ Es wird am Ende subtrahiert

Matrixnorm:

$\|f\|_2 : \sqrt{\int_{-1}^{1} f \cdot f \, dx}$

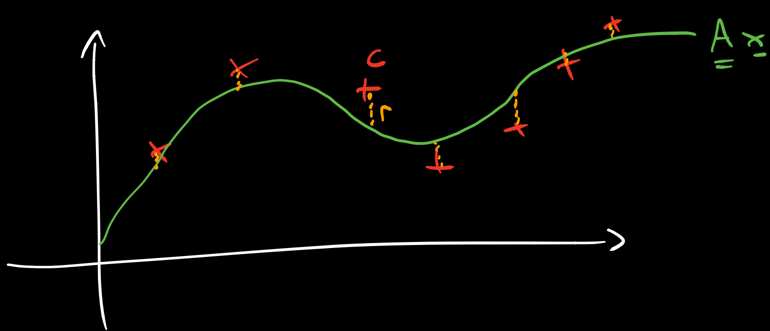
$$\|\underline{\underline{A}}\| = \max_{\|\underline{x}\| = 1} \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\|$$



Ausgleichsrechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate:

- Normalengleichung → Handrechnungen
- QR-Zerl. → Computer
- SVD → später, Profi-Software

$\underline{\underline{A}} = [\;\;]$



Problem: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r}$ Residuen

$$\begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \underline{x} - \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \|\underline{r}\|_2 = \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c}\|_2$ minimieren

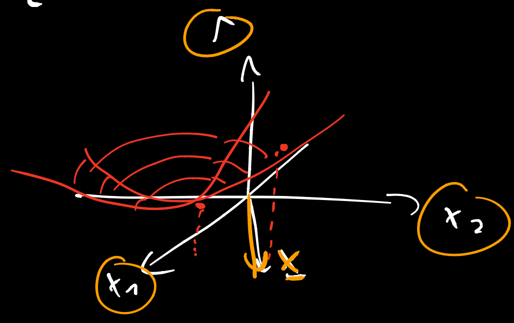
$= \sqrt[2]{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2}$ → Methode der kleinsten Quadrate

Normalengleichung:

$$A^T A x = A^T c$$

Beweisidee:

$$\Phi(x) := \|c - Ax\|_2^2 = \langle c - Ax, c - Ax \rangle \leq \|c - Ay\| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_z : t \mapsto \Phi_z(t) := \|c - A(x + tz)\|_2^2 \qquad z \neq 0, \; t \in \mathbb{R}$$

$$\Phi_z(t) = \langle c - A(x+tz), c - A(x+tz) \rangle$$

$$= [c - A(x+tz)]^T [c - A(x+tz)]$$

$$= t^2 (z^T A^T A z) + 2t(z^T A^T A x - z^T A^T c) + (x^T A^T A x + c^T c - 2 x^T A^T c)$$

Φ_z minimum bei $t = 0 \iff \Phi_z'(t=0) \stackrel{!}{=} 0$

$$0 = \Phi_z'(0) = 2(z^T A^T A x - z^T A^T c)$$

$$= 2 z^T (A^T A x - A^T c) \stackrel{!}{=} 0 \qquad z \neq 0$$

$$\Rightarrow A^T A x - A^T c = 0$$

$$A^T A x = A^T c$$

Beispiel:

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	1	3	4

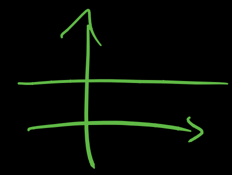
$f(-1) = 0 = a(-1)^2 + b(-1) + c$

$f(0) = 1 =$

$f(1) = 3 =$

$f(2) = 4 =$

Hypothese: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$



$\Rightarrow \quad \alpha(x) = x^2, \quad \beta(x) = x, \quad \gamma(x) = x^0 = 1(x) = 1$

$\alpha(-1) = 1, \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha(1) = 1, \quad \alpha(2) = 4$

$$\underline{\underline{A}} = {}^{4}\overset{3}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}$

$$\begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$A^T (A x)$

$(A^T A) x$

Ausgleichsrechn. mit QR:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r} \quad \text{minimieren}$$

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$, Q orth. quad. $\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, R_0 ist quadr. obere rechte Drei.

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{c} = \underline{d}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{R_0}}\,\underline{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{d} = \begin{bmatrix} \underline{d_0} \\ \underline{d_1} \end{bmatrix}$$

nu lösen $\quad \underline{\underline{R_0}}\,\underline{x} = \underline{d_0}$, $\quad \underline{d_1} = \underline{r}$

Beispiel:

$$x_1 + x_2 - 1 = r_1$$
$$x_2 - 3 = r_2$$
$$x_2 - 4 = r_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

QR:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \qquad \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}$$

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & \sin \\ 0 & -\sin & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad \underbrace{\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}}}_{\underline{\underline{R}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \cos+\sin \\ 0 & \cos-\sin \end{bmatrix}, \quad \cos-\sin = 0$$

$$\phi = 45$$

$$\sin = \cos = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}}^T, \quad \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Big\} R_0 \; = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{d}$:

$$\underline{\underline{Q}}^T \underline{c} = \underline{\underline{G}}\,\underline{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \underline{d}_0 \\ \\ \underline{d}_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R_0}}\, \underline{x} = \underline{d}_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow x_1, x_2$$

QR mit Gram-Schmidt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) $q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ii) $q_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

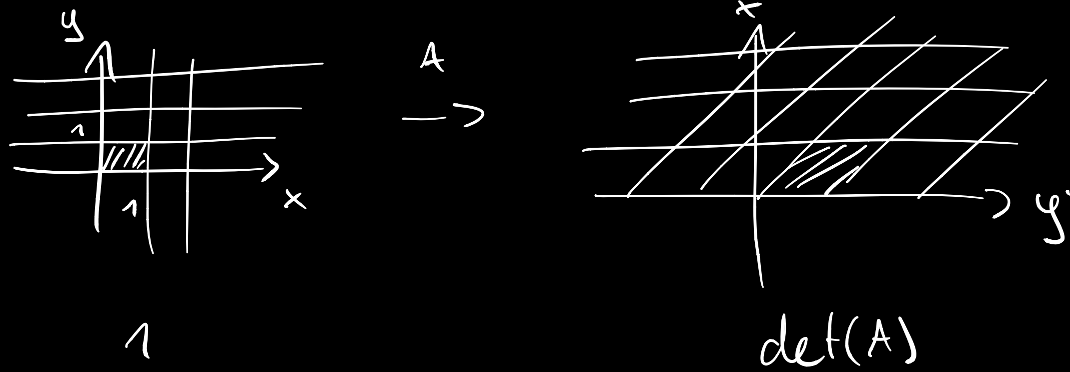
~~(iii) $q_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$~~

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 0 & 1 & ? \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 \\ 0 & q_2^T a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Big\} R_0$$

$$\Rightarrow d = Q^T c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \\ ? \end{bmatrix} \begin{matrix} \} d_0 \\ \} d_1 \end{matrix}$$

Determinante:



$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Laplac'sche Entwicklungssatz:

$$\det \begin{bmatrix} {}^{+}a & {}^{-}b & {}^{+}c \\ {}^{-}d & {}^{+}e & {}^{-}f \\ {}^{+}g & {}^{-}h & {}^{+}i \end{bmatrix} = +a \cdot \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - d \cdot \det \begin{bmatrix} b & c \\ h & i \end{bmatrix}$$

$$+ g \cdot \det \begin{bmatrix} b & c \\ e & f \end{bmatrix}$$

Essence of linear algebra

- 3B1B